

Paraméter

- 1) Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x) = (p-3,5)x^2 + 2(p-2)x + 6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!
- a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x = -2$ zérushelye a függvénynek! (2 pont)
- b) Milyen p érték esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb? (14 pont)
- 2)
- a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f : [0;7] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ függvényt! (4 pont)
- b) Adja meg az f függvény értékkészletét! (2 pont)
- c) A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $|x^2 - 6x + 5| = p$ egyenletnek a $[0;7]$ intervallumon? (8 pont)
- 3) A „TOJÁS” farmon átlagosan 10000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak. A tenyésztők azt tapasztalták, hogy –valószínűleg a zsúfoltság csökkenése miatt– ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.
- a) A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés? (5 pont)
- Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának $p\%$ -kal történő csökkenése $2p\%$ -kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p < 30$ esetén érvényes.
- b) Hány százalékkal csökkentették tavaly a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek el egy év alatt? (11 pont)
- 4) a) Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x) = x^3 + kx^2 + 9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).
- Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x = 1$ a függvénynek lokális szélsőérték helye a függvénynek!
- Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x = 1$ a függvények lokális maximum helye vagy lokális minimum helye!
- Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőérték helye is! (11 pont)
- b) Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x) = x^3 - 9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját! (5 pont)
- 5) Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = -3x^3 + (p-3)x^2 + p^2x - 6$
- a) Számítsa ki a $\int_0^2 f(x) dx$ határozott integrált, ha $p = 3$ (4 pont)
- b) Határozza meg p értékét úgy, hogy az $x = 1$ zérushelye legyen az f függvénynek! (3 pont)
- c) Határozza meg p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen! (7 pont)

6) Az \underline{a} és \underline{b} vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében: $\underline{a}(\cos t; \sin t)$ és $\underline{b}(\sin^2 t; \cos^2 t)$

- a) Adja meg \underline{a} és \underline{b} vektorok koordinátáinak pontos értékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)
- b) Mekkora az \underline{a} és \underline{b} vektorok hajlásszöge $t = \frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)
- c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén \underline{a} és \underline{b} vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

7)

- a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x + y = 10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? (6 pont)
- b) Jelölje e azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete $2x + y = b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek? (8 pont)

8)

- a) Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f: [0; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ függvényt! (5 pont)
- b) Tekintsük az $|(x-2)^2 - 1| = k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében! (7 pont)
- c) Ábrázolja a megoldások számát megadó függvény a $k \in]-6; 6[$ intervallumon! (2 pont)
- d) Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét! (2 pont)

9) A derékszögű koordináta-rendszerben az ABC háromszög csúcsai: $A(2; 1)$, $B(7; -4)$, $C(11; p)$. Határozza meg a p paraméter pontos értékét, ha a háromszög B csúcsánál levő belső szöge 60° -os. (16 pont)

10) Adott az $x^2 + y^2 + 4x - 16y + 34 = 0$ egyenletű k kör.

- a) Igazolja, hogy az $E(-7; 5)$ pont rajta van a k körön! (2 pont)
- b) Írja fel a k kör E pontjában húzható érintőjének egyenletét! (5 pont)
- c) Határozza meg az m valós paraméter összes lehetséges értékét úgy, hogy az $y = mx$ egyenletű e egyenesnek és a k körnek ne legyen közös pontja! (9 pont)

11) a) Határozza meg a $p > 0$ paraméter értékét úgy, hogy $\int_0^p (3x^2 - 24x + 20) dx = 0$ teljesüljön! (5 pont)

- a) Határozza meg az a , b , c valós paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 28$ ($x \in \mathbb{R}$) függvénynek $x = 2$ -ben $x = 2$ -ben $x = 2$ -ben zérushelye, $x = -4$ -ben lokális maximumhelye, $x = -1$ -ben pedig inflexiós pontja legyen! (11 pont)

- 12) a) Hány olyan 1000-nél kisebb p pozitív egész szám van, amelyre a p és a 42 relatív primek? (6 pont)

Az alábbi táblázatban egy végtelen szorzótábla részletét látjuk.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
...										...

A fehér, illetve szürke színű „L” alakú sávokba lévő számok összege:

$$L_1 = 1$$

$$L_2 = 2 + 4 + 2 = 8$$

$$L_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$$

- b) Igazolja, hogy $L_n = n^3$ (4 pont)

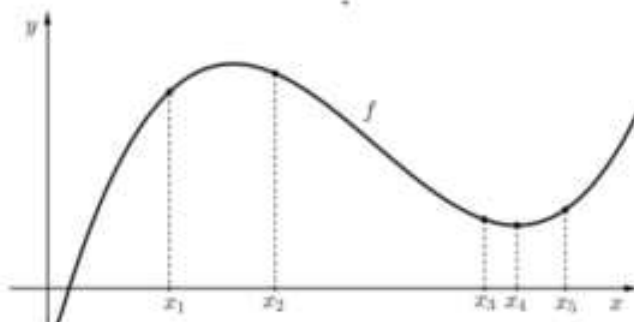
- c) Igazolja, hogy az első n pozitív köbszám összege

$$K_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad (6 \text{ pont})$$

13)

- a) Az ábrán a harmadfokú f függvény grafikonjának egy részlete látható. A függvény értelmezési tartományában megjelöltünk öt helyet.

Mindegyik esetben döntse el, hogy az adott helyen az f első, illetve a második deriváltjának előjele pozitív (P) vagy negatív (N)! Válaszát írja a megadott táblázat megfelelő cellájába!



hely	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
f' előjele	P			0	
f'' előjele					

(Tudjuk, hogy $f'(x_4) = 0$.) (4 pont)

b) Adott az $y = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 8$ egyenletű parabola.

Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $4x - y = k$ egyenletű egyenes érintse a parabolát, és határozza meg az érintési pont koordinátáit is! (9 pont)

14) Adott az $x^2 - (4p+1)x + 2p = 0$ másodfokú egyenlet, ahol p valós paraméter.

a) Igazolja, hogy bármely valós p érték esetén az egyenletnek két különböző valós gyöke van! (3 pont)

b) Ha az egyenlet egyik gyöke 3, akkor mennyi a másik gyöke? (4 pont)

c) Határozza meg a p paraméter értékét úgy, hogy az egyenlet gyökeinek négyzetösszege 7 legyen! (6 pont)

15) a) Határozza meg az m valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!

Az $x^2 - 2x + 4 = mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van. (6 pont)

b) Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{3}{(1 + \cos x)^2 + 2}$ függvény értékkészlete az $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ intervallum. (5 pont)

c) Tudjuk, hogy az A, B, C kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz? (5 pont)